Grundlagen der Algebra

Einleitung

Auf den nachfolgenden Seiten werden grundlegende Begriffe und Tatsachen der Algebra erläutert:

Zahlenmengen, Rechenoperationen, Rechnen mit Brüchen, Rechenregeln, Potenzen und Potenzgesetze, Wurzeln, Hierarchie der Rechenoperationen, (lineare) Gleichungen.

Diese Begriffe und Tatsachen werden im Vorbereitungskurs der PH Bern als bekannt vorausgesetzt. Siehe die Beispiele auf Seite 7.

Inhaltsverzeichnis

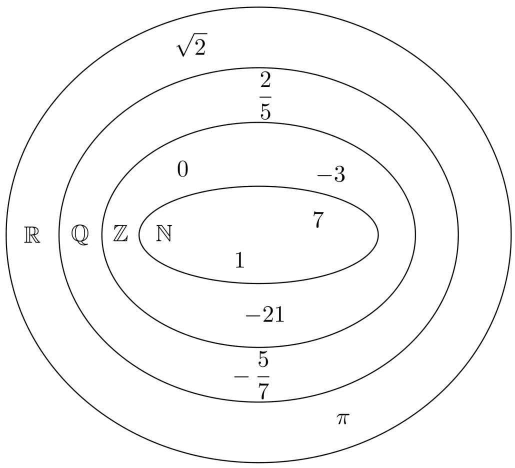
1 Zahlenmengen

Die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen: $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots$
Manchmal ist es praktisch, auch 0 zu den natürlichen Zahlen zu zählen. Die Bezeichnung ist dann $\mathbb{N}_0$.

Die Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen: $\ldots,\ -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots$

Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen: Alle Brüche der Form $\frac{p}{q}$ mit einer ganzen Zahl p (Zähler) und einer natürlichen Zahl q (Nenner).
Zwei Brüche $\frac{p}{q}$ und $\frac{r}{s}$ sind gleich(-wertig), wenn $p \cdot s = q \cdot r$ gilt.
Alle gleich(-wertig)en Brüche stellen eine **rationale Zahl** dar.
Beispiel: $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$ denn $1 \cdot 6 = 2 \cdot 3$.
$\frac{1}{2}$ und $\frac{3}{6}$ repräsentieren die gleiche rationale Zahl.

Die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen: Alle Zahlen, die sich als Dezimalbruch schreiben lassen: $1.2,\ \ -3.21,\ \ \pi \approx 3.14159,\ \ \sqrt{2} \approx 1.41421,$ etc.
Abbrechende und periodische Dezimalbrüche stellen rationale Zahlen dar.
Beispiele: $0.25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4},\ \ 0.\overline{3} = 0.33333\ldots = \frac{1}{3}$
Zahlen wie π oder $\sqrt{2}$ lassen sich <u>nicht</u> als Brüche darstellen!



$\mathbb{N}$ ist eine Teilmenge von $\mathbb{Z}$. Jede natürliche Zahl ist auch eine ganze Zahl.

$\mathbb{Z}$ ist eine Teilmenge von $\mathbb{Q}$. Jede ganze Zahl ist auch eine rationale Zahl. Setze $z = \frac{z}{1}$.

$\mathbb{Q}$ ist eine Teilmenge von $\mathbb{R}$. Jede rationale Zahl ist auch eine reelle Zahl.
Jeder Bruch lässt sich als Dezimalbruch darstellen:
$\frac{6}{5} = 1.2,\ \ \frac{-321}{100} = -3.21,\ \frac{1}{3} = 0.33333\ldots$

2 Rechenoperationen

2.1 Grundrechenarten

Rechenoperation	**allgemein**	**Zahlenbeispiel**	**Das Ergebnis einer ...**
Addition	$a+b$	$21+7=28$	... Addition heisst **Summe**
Subtraktion	$a-b$	$21-7=14$	... Subtraktion heisst **Differenz**
Multiplikation	$a \cdot b$	$21 \cdot 7 = 147$	... Multiplikation heisst **Produkt**
Division	$a : b = \frac{a}{b}$	$21 : 7 = \frac{21}{7} = 3$	... Division heisst **Quotient**

2.2 Rechnen mit Brüchen

Rechenoperation	**allgemein**	**Zahlenbeispiel**
Addition von Brüchen	$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} + \frac{c \cdot b}{d \cdot b} = \frac{ad+bc}{bd}$	$\frac{2}{5} + \frac{3}{8} = \frac{2 \cdot 8}{5 \cdot 8} + \frac{3 \cdot 5}{8 \cdot 5} = \frac{16+15}{40} = \frac{31}{40}$
Subtraktion von Brüchen	$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} - \frac{c \cdot b}{d \cdot b} = \frac{ad-bc}{bd}$	$\frac{2}{5} - \frac{3}{8} = \frac{2 \cdot 8}{5 \cdot 8} - \frac{3 \cdot 5}{8 \cdot 5} = \frac{16-15}{40} = \frac{1}{40}$
Multiplikation von Brüchen	$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} = \frac{ac}{bd}$	$\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{8} = \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 8} = \frac{6}{40} = \frac{3}{20}$
Division von Brüchen	$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$	$\frac{2}{5} : \frac{3}{8} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{8}} = \frac{2}{5} \cdot \frac{8}{3} = \frac{16}{15}$
Der Kehrwert eines Bruches	$1 : \frac{a}{b} = \frac{1}{\frac{a}{b}} = 1 \cdot \frac{b}{a} = \frac{b}{a}$	$1 : \frac{3}{8} = \frac{1}{\frac{3}{8}} = 1 \cdot \frac{8}{3} = \frac{8}{3}$

Bei der Addition und der Subtraktion müssen die Brüche zuerst gleichnamig gemacht werden.

Anstelle der Variablen a, b, c, d können Zahlen, wie in den Beispielen rechts, aber auch Terme (sinnvolle Ausdrücke mit Ziffern, Variablen, Symbolen für mathematische Operationen und Klammern) stehen.

3 Rechenregeln

Rechenregel	**allgemein**	**Zahlenbeispiel**
Kommutativgesetz der Addition	$a+b=b+a$	$21+7=7+21=28$
Assoziativgesetz der Addition	$(a+b)+c=a+(b+c)$	$(2+3)+4=2+(3+4)=9$
Kommutativgesetz der Multiplikation	$a\cdot b=b\cdot a$	$21\cdot 7=7\cdot 21=147$
Assoziativgesetz der Multiplikation	$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$	$(2\cdot 3)\cdot 4=2\cdot(3\cdot 4)=24$
Distributivgesetz	$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$	$2\cdot(3+4)=2\cdot 3+2\cdot 4=14$

Anstelle der Variablen a, b, c können Zahlen, wie in den Beispielen rechts, aber auch Terme (sinnvolle Ausdrücke mit Ziffern, Variablen, Symbolen für mathematische Operationen und Klammern) stehen.

Das Kommutativgesetz garantiert, dass man bei Summen resp. bei Produkten (auch von mehreren Zahlen) die Reihenfolge der Summanden resp. Faktoren beliebig umstellen darf.

Das Assoziativgesetz garantiert, dass man bei Summen resp. bei Produkten von mehreren Zahlen die Rechnungen in beliebiger Reihenfolge ausführen darf.

Distributivgesetz: Der Prozess von $a\cdot(b+c)$ zu $a\cdot b+a\cdot c$ heisst (eine Klammer) **ausmultiplizieren**. Der Prozess von $a\cdot b+a\cdot c$ zu $a\cdot(b+c)$ heisst **ausklammern**.

Wichtige Verallgemeinerungen des Distributivgesetzes sind die **Binomische Formeln**

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2\\ (a-b)^2 &= a^2-2ab+b^2\\ (a-b)(a+b) &= a^2-b^2\end{aligned}$$

4 Potenzen

Einen Ausdruck der Form a^r nennt man **Potenz**, a ist die **Basis**, r der **Exponent**.

Der Exponent ist eine natürliche Zahl : $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ Faktoren}}$

insbesondere : $a^1 = a$

Der Exponent ist eine ganze Zahl : $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$; $a \neq 0$
insbesondere : $a^0 = 1$; $a \neq 0$

Der Exponent ist eine rationale Zahl : $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$; $a > 0$

Der Exponent ist eine irrationale Zahl : a^r; $a > 0$; r reell :
In diesem Fall wird der Exponent r durch eine Folge rationaler Zahlen approximiert.

Bemerkung: Der Ausdruck 0^0 ist unbestimmt. Oft ist es aber zweckmässig, $0^0 = 1$ zu setzen (zum Beispiel beim Binomischen Lehrsatz).

Potenzgesetze

	allgemein	**Zahlenbeispiel**
gleiche Basis	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$2^4 \cdot 2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^{4+3} = 2^7$
gleiche Basis	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$\frac{2^4}{2^3} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 2} = 2^{4-3} = 2^1 = 2$
eine Potenz potenzieren	$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	$\left(2^4\right)^3 = 2^4 \cdot 2^4 \cdot 2^4 = 2^{4+4+4} = 2^{4 \cdot 3} = 2^{12}$
gleiche Exponenten	$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$	$2^4 \cdot 3^4 = (2 \cdot 3)^4 = 6^4 = 1296$
gleiche Exponenten	$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$	$\frac{15^3}{5^3} = \left(\frac{15}{5}\right)^3 = 3^3 = 27$

Diese Gesetze gelten für $m, n \in \mathbf{N}$, aber (falls $a, b > 0$) auch für ganzzahlige, rationale und sogar irrationale Exponenten.

5 Wurzeln

$b^n = a \iff b = \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$; $b > 0$, $n = 2, 3, 4, \ldots$

Insbesondere: $b^2 = a \iff b = \sqrt[2]{a} = \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$; $b > 0$
(Man beachte aber, dass $b = -\sqrt{a}$ ebenfalls Lösung der Gleichung $b^2 = a$ ist.)

Es gilt $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$ und auch $a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}} = a$

Durch $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ lassen sich Potenzgesetze in Wurzelgesetze übersetzen und umgekehrt.

6 Hierarchie der Rechenoperationen

Für die Rechenoperationen gelten Hierarchien:
Potenzieren kommt vor multiplizieren und dividieren,
multiplizieren und dividieren kommt vor addieren und subtrahieren.

Also: "Potenzrechnungen vor Punktrechnungen, Punktrechnungen vor Strichrechnungen."

Beispiele:

$$
\begin{aligned}
-2^4 &= (-1) \cdot 2^4 = -2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = -16 \\
(-2)^4 &= (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = +16 \\
5 \cdot 3^4 &= 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 405 \\
3 \cdot 10^7 \cdot 8 \cdot 10^4 &= 3 \cdot 8 \cdot 10^7 \cdot 10^4 = 3 \cdot 8 \cdot 10^{7+4} = 24 \cdot 10^{11} = 2.4 \cdot 10^{12} \\
\frac{8 \cdot 10^9}{2 \cdot 10^5} &= \frac{8}{2} \cdot \frac{10^9}{10^5} = 4 \cdot 10^4
\end{aligned}
$$

7 Gleichungen

Gleichungen tauchen an viele Stellen in der Mathematik auf.
Eine Gleichung besteht aus zwei Termen T_1 und T_2 (sinnvolle Ausdrücke mit Zahlen und Variablen), die durch ein Gleichheitszeichen verbunden sind.

Äquivalenzumformungen

Gleichungen können durch Äquivalenzoperationen so umgeformt werden, dass sich ihre Lösungen nicht ändern. Ziel von Äquivalenzoperationen ist das Umformen einer Gleichung so, dass man die Lösungen direkt ablesen kann.

Man darf die Terme auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens (korrekt) umformen, meist vereinfachen.

$T_1 = T_2 \iff T_1 + a = T_2 + a$
Man darf auf beiden Seiten einer Gleichung eine Zahl a addieren resp. subtrahieren.

$T_1 = T_2 \iff T_1 \cdot a = T_2 \cdot a$
Man darf beide Seiten einer Gleichung mit einer Zahl $a \neq 0$ multiplizieren resp. durch eine Zahl $a \neq 0$ dividieren.

Bei Ungleichungen $T_1 < T_2$ ist Vorsicht geboten: Multipliziert oder dividiert man beide Seiten einer solche Ungleichung mit einer negativen Zahl, dann ändert das Ungleichheitszeichen:
$2 < 3 \iff (-1) \cdot 2 > (-1) \cdot 3 \iff -2 > -3$

Lineare Gleichungen

Eine Gleichung, die auf die Form $ax+b = 0$ gebracht werden kann, heisst lineare Gleichung.

$ax + b = 0$
$ax = -b$
$x = -\frac{b}{a}$

Ist $a \neq 0$, dann hat die Gleichung $ax + b = 0$ genau eine Lösung, nämlich $x = -\frac{b}{a}$.

<u>Beispiele:</u> $3x + 12 = 0 \implies x = \frac{-12}{3} = -\frac{12}{3} = -4$

$3x - 12 = 5x + 6 \implies -12 = 2x + 6 \implies -18 = 2x \implies x = -9$

8 Aufgabenbeispiele mit Lösungen

8.1 Aufgaben

1. Berechnen Sie mit dem Taschenrechner

   (a) $\frac{1}{4} - \frac{1}{5}$; (b) $\frac{24}{\frac{1}{6}}$; (c) $5 \cdot \frac{1}{1-0.6}$; (d) $\frac{32 \cdot 10^7}{8 \cdot 10^{-4}}$;

   (e) $\sqrt{1'000'000}$; (f) $\sqrt[3]{0.125}$; (g) $\sqrt[12]{2}$; (h) $1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}}$.

2. Richtig oder falsch?

   (a) $2 + 2 \cdot 3 = 12$; (b) $-3^4 = -81$; (c) $1 - (-1)^5 = 0$;
   (d) $k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$; (e) $\frac{k^2-1}{k-1} = k - 1$; (f) $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$;

3. Die nachfolgenden Terme lassen sich vereinfachen.

   (a) $(n-1)^2 + 2n + 1$; (b) $\frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2}$; (c) $\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

   (d) $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$; (e) $2 - \frac{2n+1}{n+1}$; (f) $\sqrt{n} \cdot \sqrt{n}$; (g) $\frac{x}{\sqrt{x}}$.

   (h) $a^n \cdot a^{-n}$; (i) $\frac{1}{a^{-n}}$; (j) $\frac{10^n}{5^n}$; (k) $\frac{(2a)^n}{a^n} \cdot \frac{1}{4^n}$; (l) $\frac{1}{\frac{n}{m}}$.

4. Lösen Sie die nachfolgenden Gleichungen jeweils nach x auf

   (a) $2x - 3 = 5x + 6$; (b) $\frac{1}{3}x + \frac{7}{3} = 5$; (c) $\frac{4x-10}{5} = 10$;

   (d) $\frac{x}{6} + 25 = 100$; (e) $\frac{36}{x} = 45$; (f) $s + (x-1)a = z$;

5. Setzen Sie in den beiden Termen $T_1 = 5x - 3$ und $T_2 = 3(x-2)^2 + 5$
   zuerst $x = 1$, dann $x = 2$ und schliesslich $x = 3$. Rechnen Sie aus.

   Lösungen: Siehe auf der nachfolgenden Seite.

8.2 Lösungen:

1. (a) $\frac{1}{20}$; (b) 144 ; (c) 12.5 ; (d) $4 \cdot 10^{11}$;

   (e) 1000 ; (f) 0.5 ; (g) 1.05946... ; (h) $\frac{8}{5}$.

2. (a) falsch (es gibt 8); (b) richtig ; (c) falsch (es gibt 2);
   (d) richtig ; (e) falsch (es gibt $k+1$); (f) falsch
   (siehe 'Binomische Formeln', Seite 3)

3. (a) n^2 ; (b) n^2 ; (c) $\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$;

   (d) $\frac{1}{n(n+1)}$; (e) $\frac{1}{n+1}$; (f) n ; (g) $\sqrt{x}$.

   (h) 1 ; (i) a^n ; (j) 2^n ; (k) $\frac{1}{2^n} = 2^{-n}$; (l) $\frac{m}{n}$.

4. (a) $x = -3$; (b) $x = 8$; (c) $x = 15$;

   (d) $x = 450$; (e) $x = 0.8$; (f) $x = 1 + \frac{z-s}{a}$;

5. $x = 1$: $T_1 = 2$, $T_2 = 8$;

   $x = 2$: $T_1 = 7$, $T_2 = 5$;

   $x = 3$: $T_1 = 12$, $T_2 = 8$;