

Formelsammlung für das Niveau I

Algebra

Rechengesetze

$$\text{Kommutativgesetze} \quad a + b = b + a \quad a \cdot b = b \cdot a$$

$$\text{Assoziativgesetze} \quad (a + b) + c = a + (b + c) \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

$$\text{Distributivgesetz} \quad a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Binomische Formeln

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

Potenzregeln

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

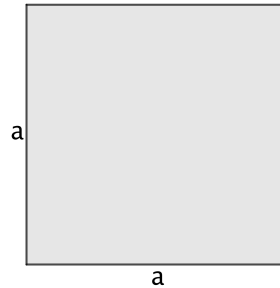
$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

Die Potenzregeln gelten für beliebige Exponenten n und m .

Geometrie: Ebene Figuren

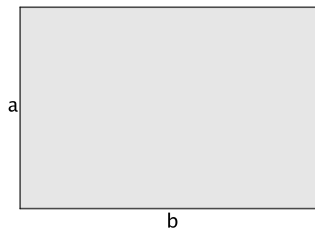
Quadrat



Umfang: $U = 4a$

Fläche: $F = a^2$

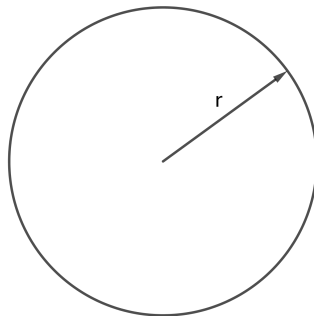
Rechteck



Umfang: $U = 2a + 2b$

Fläche: $F = ab$

Kreis

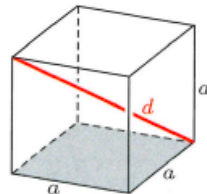


Umfang: $U = 2\pi r$

Fläche: $F = \pi r^2$

Geometrie: Räumliche Figuren

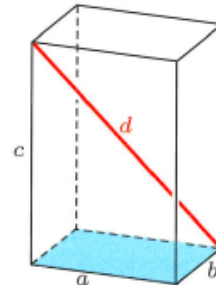
Würfel



Oberfläche: $S = 6a^2$

Volumen: $V = a^3$

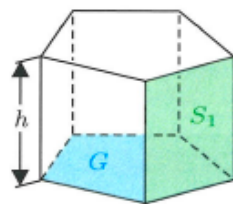
Quader



Oberfläche: $S = 2ab + 2ac + 2bc$

Volumen: $V = abc$

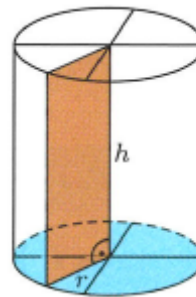
Prisma



Oberfläche: $S = 2G + S_1 + S_2 + \dots + S_n$

Volumen: $V = Gh$

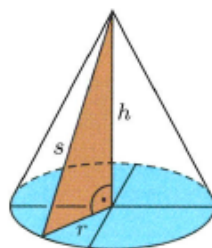
Zylinder



Oberfläche: $S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$

Volumen: $V = \pi r^2 h$

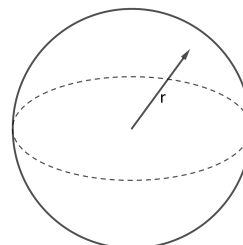
Kreiskegel



Oberfläche: $S = \pi r^2 + \pi r s$

Volumen: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

Kugel



Oberfläche: $S = 4\pi r^2$

Volumen: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

Folgen und Reihen

Folge	rekursive Beschreibungen	explizite Beschreibungen
arithmetische Folgen	$a_1, a_n = a_{n-1} + d$ $a_1, a_{n+1} = a_n + d$	$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$
	$a_0, a_n = a_{n-1} + d$ $a_0, a_{n+1} = a_n + d$	$a_n = a_0 + n \cdot d$
geometrische Folgen	$a_1, a_n = a_{n-1} \cdot q$ $a_1, a_{n+1} = a_n \cdot q$	$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$
	$a_0, a_n = a_{n-1} \cdot q$ $a_0, a_{n+1} = a_n \cdot q$	$a_n = a_0 \cdot q^n$
Fibonacci-Folge	$F_1 = F_2 = 1, F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$	$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$

Teilsommen

Folge	(Folge der) Teilsommen
arithmetische Folge: $a_n = a_1 + (n-1)d$	$s_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}$ $s_n = n \cdot a_1 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot d$
geometrische Folge: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$	$s_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$ $s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q-1}$
Fibonacci-Folge	$s_n = F_{n+2} - 1$
Folge der Quadratzahlen: $a_n = n^2$	$s_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
Folge der Kubikzahlen: $a_n = n^3$	$s_n = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$

Geometrische Reihe

$$a_1 + a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \dots = a_1 \cdot \frac{1}{1-q} = \frac{a_1}{1-q} \quad (-1 < q < 1)$$

Funktionen

Lineare Funktionen

Funktionsvorschrift:

$$f(x) = mx + q$$

Nullstelle: $f(x) = 0 = mx + q \implies x = \frac{-q}{m} \quad (m \neq 0)$

Quadratische Funktionen

Funktionsvorschrift:

Normalform: $f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$

Scheitelpunktform: $f(x) = a(x - u)^2 + v \quad (a \neq 0)$

Nullstellen: $f(x) = 0 = ax^2 + bx + c \implies x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Scheitelpunkt S :

$$f(x) = ax^2 + bx + c \implies S\left(\frac{-b}{2a} \mid \frac{-b^2 + 4ac}{4a}\right)$$

$$f(x) = a(x - u)^2 + v \implies S(u \mid v).$$

Lösen eines Extremalproblems mit quadratischen Funktionen

I. Die zu optimierende Grösse als Funktion einer einzigen Variablen darstellen

- Die Variablen sowie die gegebenen Grössen aus der Problemstellung entnehmen oder festlegen.
- Die zu optimierende Grösse in einer Ausgangsgleichung darstellen.
- Die Nebenbedingungen aus der Problemstellung entnehmen und als Gleichungen formulieren.
- Die Ausgangsgleichung mit Hilfe der Nebenbedingungen so umformen, dass die zu optimierende Grösse als Funktion nur einer Variablen erscheint.
- Aus der Problemstellung den Definitionsbereich dieser einzigen Variablen bestimmen.

II. Bestimmen des Maximums/Minimums

- Den Scheitelpunkt des Graphen der zu optimierenden Funktion bestimmen. Die y -Koordinate des Scheitelpunktes ist das gesuchte Maximum/Minimum.
- Mit Hilfe der x -Koordinate des Scheitelpunktes und der Nebenbedingungen die übrigen Variablen berechnen.
- Die gestellte Frage mit 'deutschen Sätzen' beantworten.

Wahrscheinlichkeitsrechnung

Wichtige Begriffe

Zufallsversuch: ist ein (theoretisch) beliebig oft wiederholbarer Vorgang, dessen Ausgang sich *nicht* mit Sicherheit vorhersagen lässt.

Stichprobenraum Ω : Die Menge aller möglichen Ausgänge eines Zufallsversuches.

Ereignis: Teilmenge A von Ω .

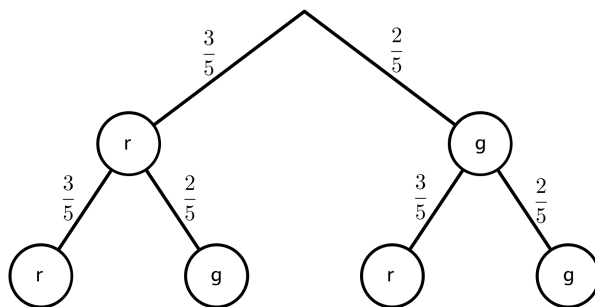
Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen des Ereignisses A : $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{'günstige Fälle'}}{\text{'mögliche Fälle'}}$

Diese Formel gilt nur, wenn alle Ausgänge des Zufallsversuchs gleich wahrscheinlich sind.

Mehrstufige Zufallsversuche

Mehrstufige Zufallsversuche können oft mit Baumdiagrammen beschrieben werden.

Beispiel: Aus einer Urne mit drei roten und zwei grünen Kugeln wird eine Kugel gezogen und ihre Farbe notiert. Danach wird die Kugel wieder zurückgelegt und der Versuch wiederholt.



1. Zufallsversuch:
Ziehen der ersten Kugel
r : die Kugel ist rot
g : die Kugel ist grün
2. Zufallsversuch:
Ziehen der zweiten Kugel
r : die Kugel ist rot
g : die Kugel ist grün

Für Baumdiagramme gelten die folgenden **Pfadregeln:**

1. Die Wahrscheinlichkeit eines Pfades ist gleich dem Produkt aller Wahrscheinlichkeiten längs des Pfades.
2. Setzt sich bei einem mehrstufigen Zufallsversuch ein Ereignis aus verschiedenen Pfaden im Baumdiagramm zusammen, dann erhält man die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses durch Addition der einzelnen Pfadwahrscheinlichkeiten.

Für unser Beispiel ergibt sich:

$$P(rr) = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{25}, \quad P(rg) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{25}, \quad P(gr) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{25}, \quad P(gg) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{25}.$$

$$P(\text{mindestens eine der gezogenen Kugeln ist rot}) = \frac{9}{25} + \frac{6}{25} + \frac{6}{25} = \frac{21}{25}.$$

Binomialkoeffizient

$$\binom{n}{k} = \frac{\overbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdots (n-k+1)}^{k \text{ Zahlen}}}{\underbrace{k \cdot (k-1) \cdots 2 \cdot 1}_{k \text{ Zahlen}}} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$\binom{n}{k}$ zählt die Anzahl der Möglichkeiten, aus n unterscheidbaren Gegenständen genau k auszuwählen.

Bernoulli-Kette

Zufallsversuche mit genau zwei möglichen Ausgängen ("Erfolg" und "Misserfolg") nennt man **Bernoulli-Experimente**.

Ein Zufallsversuch, der aus n unabhängigen Durchführungen desselben Bernoulli-Experimentes besteht, heisst **Bernoulli-Kette**.

Bei einer **Bernoulli-Kette** von n Durchführungen mit der Erfolgswahrscheinlichkeit p beträgt die Wahrscheinlichkeit für k Erfolge

$$P(k \text{ Erfolge}) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Lotto "k aus n"

Auf einem Lottoschein werden pro Tipp genau k von n Zahlen zufällig angekreuzt. Dann werden zufällig k Zahlen gezogen.

Die Wahrscheinlichkeit, bei einem Tipp genau j Zahlen richtig getippt zu haben, beträgt:

$$P(j \text{ Richtige}) = \frac{\binom{k}{j} \binom{n-k}{k-j}}{\binom{n}{k}}$$