

# Formelsammlung für das Niveau II

## Algebra

### Rechengesetze

$$\text{Kommutativgesetz} \quad a + b = b + a \quad a \cdot b = b \cdot a$$

$$\text{Assoziativgesetz} \quad (a + b) + c = a + (b + c) \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

$$\text{Distributivgesetz} \quad a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

### Binomische Formeln

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

### Potenzregeln

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

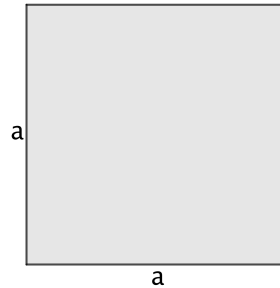
$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

Die Potenzregeln gelten für beliebige Exponenten  $n$  und  $m$ .

## Geometrie: Ebene Figuren

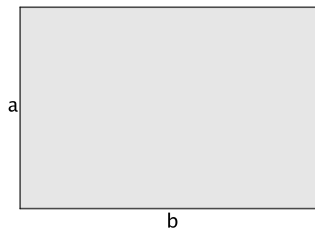
### Quadrat



Umfang:  $U = 4a$

Fläche:  $F = a^2$

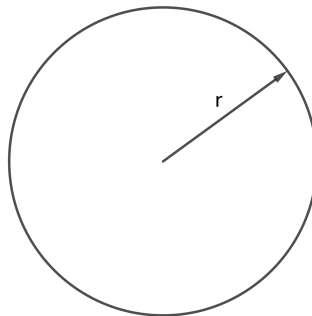
### Rechteck



Umfang:  $U = 2a + 2b$

Fläche:  $F = ab$

### Kreis

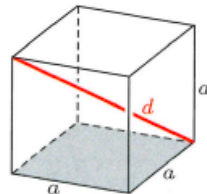


Umfang:  $U = 2\pi r$

Fläche:  $F = \pi r^2$

## Geometrie: Räumliche Figuren

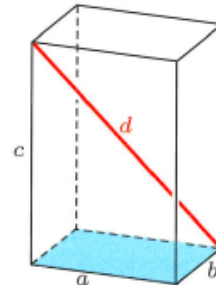
### Würfel



Oberfläche:  $S = 6a^2$

Volumen:  $V = a^3$

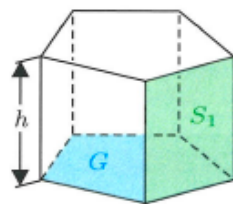
### Quader



Oberfläche:  $S = 2ab + 2ac + 2bc$

Volumen:  $V = abc$

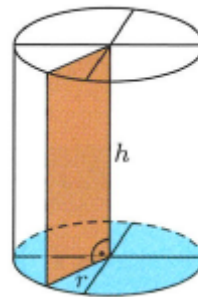
### Prisma



Oberfläche:  $S = 2G + S_1 + S_2 + \dots + S_n$

Volumen:  $V = Gh$

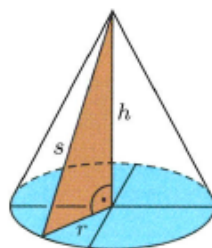
### Zylinder



Oberfläche:  $S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$

Volumen:  $V = \pi r^2 h$

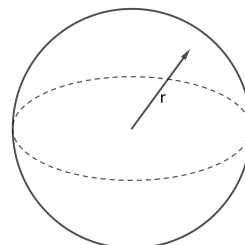
### Kreiskegel



Oberfläche:  $S = \pi r^2 + \pi r s$

Volumen:  $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

### Kugel



Oberfläche:  $S = 4\pi r^2$

Volumen:  $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

## Folgen und Reihen

Folge	rekursive Beschreibungen	explizite Beschreibungen
arithmetische Folgen	$a_1, a_n = a_{n-1} + d$ $a_1, a_{n+1} = a_n + d$	$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$
	$a_0, a_n = a_{n-1} + d$ $a_0, a_{n+1} = a_n + d$	$a_n = a_0 + n \cdot d$
geometrische Folgen	$a_1, a_n = a_{n-1} \cdot q$ $a_1, a_{n+1} = a_n \cdot q$	$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$
	$a_0, a_n = a_{n-1} \cdot q$ $a_0, a_{n+1} = a_n \cdot q$	$a_n = a_0 \cdot q^n$
Fibonacci-Folge	$F_1 = F_2 = 1, F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$	$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$

## Teilsummen

Folge	(Folge der) Teilsummen
arithmetische Folge: $a_n = a_1 + (n - 1)d$	$s_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}$ $s_n = n \cdot a_1 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot d$
geometrische Folge: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$	$s_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$
Fibonacci-Folge	$s_n = F_{n+2} - 1$
Folge der Quadratzahlen: $a_n = n^2$	$s_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
Folge der Kubikzahlen: $a_n = n^3$	$s_n = \left( \frac{n(n+1)}{2} \right)^2$

## Geometrische Reihe

$$a_1 + a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + a_1q^4 + \dots = \frac{a_1}{1 - q} \quad \text{falls} \quad -1 < q < 1$$

## Funktionen

### Lineare Funktionen

$$\text{Funktionsvorschrift: } f(x) = mx + q$$

$$\text{Nullstelle: } f(x) = 0 = mx + q \implies x = \frac{-q}{m}$$

### Exponentialfunktionen, Wachstum und Zerfall

$$\text{Funktionsvorschrift: } f(x) = b^x \quad \text{oder} \quad f(x) = e^{k \cdot x}$$

#### Wachstums- resp. Zerfallsfunktion

$$f(t) = a \cdot b^t$$

$$\text{oder } f(t) = a \cdot e^{k \cdot t}$$

$$\text{Radioaktiver Zerfall: } N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

#### Logarithmen

Der Logarithmus (bezogen auf die Basis  $b$ ) einer Zahl  $x$  ist definiert durch:

$$y = \log_b x \quad \iff \quad b^y = x \quad (b, x \in \mathbf{R}^+, b \neq 1).$$

Insbesondere

$$\text{Zehnerlogarithmus: } x = \lg z = \log_{10} z \quad \iff \quad 10^x = z$$

$$\text{Logarithmus naturalis: } x = \ln z = \log_e z \quad \iff \quad e^x = z$$

#### Logarithmengesetze

$$\log_b(u \cdot v) = \log_b u + \log_b v$$

$$\log_b\left(\frac{u}{v}\right) = \log_b u - \log_b v$$

$$\log_b u^s = s \cdot \log_b u, \quad u \in \mathbf{R}^+, s \in \mathbf{R}.$$

## Quadratische Funktionen

Funktionsvorschrift:

$$\text{Normalform: } f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$$

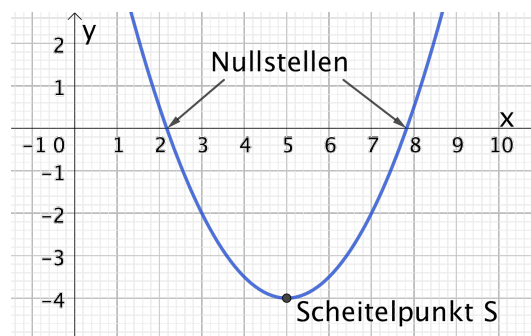
$$\text{Scheitelpunktform: } f(x) = a(x - u)^2 + v \quad (a \neq 0)$$

$$\text{Nullstellen: } f(x) = 0 = ax^2 + bx + c \implies x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Scheitelpunkt S:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \implies S\left(\frac{-b}{2a} \mid \frac{-b^2 + 4ac}{4a}\right)$$

$$f(x) = a(x - u)^2 + v \implies S(u \mid v).$$



## Differentialrechnung

Differenzenquotient an der Stelle  $x$ :  $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

Differentialquotient an der Stelle  $x$ :  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$

### Ableitungen der wichtigsten elementaren Funktionen

$f(x) = x^s$	$f'(x) = sx^{s-1}; \quad s \in \mathbf{R}$
$f(x) = c$	$f'(x) = 0$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2} = \frac{-1}{x^2}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = \log_a x$	$f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln a}$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = a^x$	$f'(x) = (\ln a)a^x$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$

**Ableitungsregeln**

$$f(x) = c \cdot u(x) \implies f'(x) = c \cdot u'(x)$$

$$f(x) = u(x) + v(x) \implies f'(x) = u'(x) + v'(x)$$

$$f(x) = u(x) \cdot v(x) \implies f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \implies f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v(x)^2}$$

**Lösen eines Extremalproblems****I. Die zu optimierende Grösse als Funktion einer einzigen Variablen darstellen**

- (a) Die Variablen sowie die gegebenen Grössen aus der Problemstellung entnehmen oder festlegen.
- (b) Die zu optimierende Grösse in einer Ausgangsgleichung darstellen.
- (c) Die Nebenbedingungen aus der Problemstellung entnehmen und als Gleichungen formulieren.
- (d) Die Ausgangsgleichung mit Hilfe der Nebenbedingungen so umformen, dass die zu optimierende Grösse als Funktion nur einer Variablen erscheint.
- (e) Aus der Problemstellung den Definitionsbereich dieser einzigen Variablen bestimmen.

**II. Bestimmen der globalen Extrema**

- (a) Die lokalen Extrema der gefundenen Funktion bestimmen.
- (b) Die globalen Extrema der gefundenen Funktion bestimmen (die lokalen Extremwerte mit den Werten der Randstellen der Definitionsbereichs vergleichen).
- (c) Mit Hilfe der Extremstellen und der Nebenbedingungen die übrigen Variablen berechnen.
- (d) Die gestellte Frage mit 'deutschen Sätzen' beantworten.



## Wahrscheinlichkeitsrechnung

### Wichtige Begriffe

**Zufallsversuch:** ist ein (theoretisch) beliebig oft wiederholbarer Vorgang, dessen Ausgang sich *nicht* mit Sicherheit vorhersagen lässt.

**Stichprobenraum  $\Omega$ :** Die Menge aller möglichen Ausgänge eines Zufallsversuches.

**Ereignis:** Teilmenge  $A$  von  $\Omega$ .

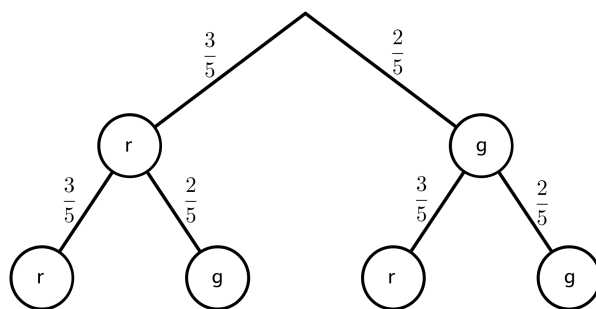
**Wahrscheinlichkeit** für das Eintreffen des Ereignisses  $A$ :  $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{'günstige Fälle'}}{\text{'mögliche Fälle'}}$

Diese Formel gilt nur, wenn alle Ausgänge des Zufallsversuchs gleich wahrscheinlich sind.

### Mehrstufige Zufallsversuche

Mehrstufige Zufallsversuche können oft mit Baumdiagrammen beschrieben werden.

**Beispiel:** Aus einer Urne mit drei roten und zwei grünen Kugeln wird eine Kugel gezogen und ihre Farbe notiert. Danach wird die Kugel wieder zurückgelegt und der Versuch wiederholt.



1. Zufallsversuch:  
Ziehen der ersten Kugel  
r : die Kugel ist rot  
g : die Kugel ist grün
2. Zufallsversuch:  
Ziehen der zweiten Kugel  
r : die Kugel ist rot  
g : die Kugel ist grün

Für Baumdiagramme gelten die folgenden **Pfadregeln:**

1. Die Wahrscheinlichkeit eines Pfades ist gleich dem Produkt aller Wahrscheinlichkeiten längs des Pfades.
2. Setzt sich bei einem mehrstufigen Zufallsversuch ein Ereignis aus verschiedenen Pfaden im Baumdiagramm zusammen, dann erhält man die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses durch Addition der einzelnen Pfadwahrscheinlichkeiten.

Für unser Beispiel ergibt sich:

$$P(rr) = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{25}, \quad P(rg) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{25}, \quad P(gr) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{25}, \quad P(gg) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{25}.$$

$$P(\text{mindestens eine der gezogenen Kugeln ist rot}) = \frac{9}{25} + \frac{6}{25} + \frac{6}{25} = \frac{21}{25}.$$

**Binomialkoeffizient**

$$\binom{n}{k} = \frac{\overbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdots (n-k+1)}^{k \text{ Zahlen}}}{\underbrace{k \cdot (k-1) \cdots 2 \cdot 1}_{k \text{ Zahlen}}} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$\binom{n}{k}$  zählt die Anzahl der Möglichkeiten, aus  $n$  unterscheidbaren Gegenständen genau  $k$  auszuwählen.

**Bernoulli-Kette**

Zufallsversuche mit genau zwei möglichen Ausgängen ("Erfolg" und "Misserfolg") nennt man **Bernoulli-Experimente**.

Ein Zufallsversuch, der aus  $n$  unabhängigen Durchführungen desselben Bernoulli-Experimentes besteht, heisst **Bernoulli-Kette**.

Bei einer **Bernoulli-Kette** von  $n$  Durchführungen mit der Erfolgswahrscheinlichkeit  $p$  beträgt die Wahrscheinlichkeit für  $k$  Erfolge

$$P(k \text{ Erfolge}) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

**Lotto "k aus n"**

Auf einem Lottoschein werden pro Tipp genau  $k$  von  $n$  Zahlen zufällig angekreuzt. Dann werden zufällig  $k$  Zahlen gezogen.

Die Wahrscheinlichkeit, bei einem Tipp genau  $j$  Zahlen richtig getippt zu haben, beträgt:

$$P(j \text{ Richtige}) = \frac{\binom{k}{j} \binom{n-k}{k-j}}{\binom{n}{k}}$$