PHBern
Pädagogische Hochschule

Formelsammlung Mathematik Niveau II

Algebra

Rechengesetze

Kommutativgesetze	$a+b=b+a$	$a \cdot b = b \cdot a$
Assoziativgesetze	$(a+b)+c=a+(b+c)$	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
Distributivgesetz	$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$	

Binomische Formeln

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	"+"-*Formel*
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	"-"-*Formel*
$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$	"+-"-*Formel*

Potenzregeln

Multiplikation und Division von…

…Potenzen mit gleicher Basis:	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
…Potenzen mit gleichem Exponenten:	$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$	$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$
Potenz einer Potenz	$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	

Die Potenzregeln gelten für beliebige Exponenten n und m.

Logarithmus Definition

$a^x = u \quad \Leftrightarrow \quad x = \log_a(u)$ $\qquad a, u \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$

"Logarithmus zur Basis a von u"

$\ln(x) = \log_e(x)$ natürlicher Logarithmus; $\qquad \log(x) = \log_{10}(x)$ Zehner Logarithmus;

Logarithmengesetze

Für das Rechnen mit Logarithmen gelten die folgenden Regeln:

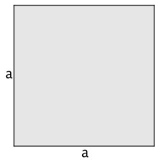
$$\log_a(u \cdot v) = \log_a(u) + \log_a(u)$$

$$\log_a(u : v) = \log_a(u) - \log_a(u)$$

$$\log_a(u^r) = r \cdot \log_a(u) \qquad u \in \mathbb{R}^+,\ r \in \mathbb{R}.$$

Geometrie: Ebene Figuren

Quadrat



Umfang: $U = 4a$

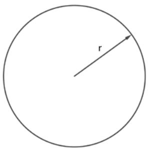
Fläche: $F = a^2$

Rechteck

Umfang: $U = 2a + 2b$

Fläche: $F = ab$

Kreis

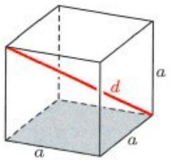


Umfang: $U = 2\pi r$

Fläche: $F = \pi r^2$

Geometrie: Räumliche Figuren

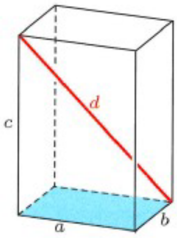
Würfel



Oberfläche: $S = 6a^2$

Volumen: $V = a^3$

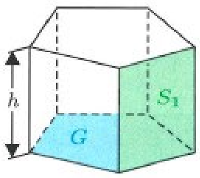
Quader



Oberfläche: $S = 2ab + 2ac + 2bc$

Volumen: $V = abc$

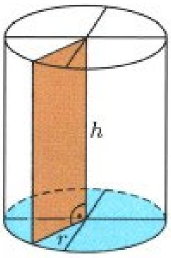
Prisma



Oberfläche: $S = 2G + S_1 + S_2 + \cdots + S_n$

Volumen: $V = Gh$

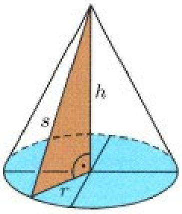
Zylinder



Oberfläche: $S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$

Volumen: $V = \pi r^2 h$

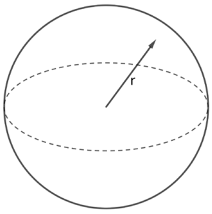
Kreiskegel



Oberfläche: $S = \pi r^2 + \pi rs$

Volumen: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

Kugel



Oberfläche: $S = 4\pi r^2$

Volumen: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

Folgen und Reihen

Folge	rekursive Beschreibungen	explizite Beschreibungen
arithmetische Folgen	$a_1, \quad a_n = a_{n-1} + d$ oder $a_1, \quad a_{n+1} = a_n + d$	$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$ oder $a_n = n \cdot d + a_1 - d$
geometrische Folgen	$a_1, \quad a_n = a_{n-1} \cdot q$ oder $a_1, \quad a_{n+1} = a_n \cdot q$	$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$
Fibonacci-Folge	$F_1 = F_2 = 1, F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$	$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

Teilsummen (Die Summanden bilden eine Folge!)

Folge der Summanden	Folge der Teilsummen
arithmetische Folge: $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$	$s_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}$
Folge der natürlichen Zahlen (Spezialfall mit $a_1 = 1$und $d = 1$): $a_n = n$	$D_n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$
geometrische Folge: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$	$s_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \cdots + a_1 q^{n-1}$ $= a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q-1}$
Fibonacci-Folge	$s_n = F_{n+2} - 1$
Folge der Quadratzahlen: $a_n = n^2$	$s_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
Folge der Kubikzahlen: $a_n = n^3$	$s_n = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

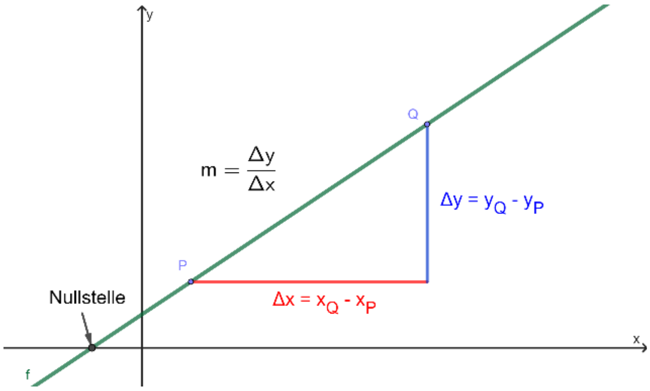
Geometrische Reihe

$$s_\infty = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \cdots = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left(a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}\right) = a_1 \cdot \frac{1}{1-q} = \frac{a_1}{1-q}$$

,wenn $-1 < q < 1$

Funktionen

Lineare Funktionen



Funktionsvorschrift: $f(x) = mx + q$

Nullstelle: $f(x) = 0$

$$mx + q = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-q}{m}$$

wenn $m \neq 0$

Quadratische Funktionen

Funktionsvorschrift:

Normalform	Scheitelform
$f(x) = ax^2 + x + c$ wenn $a \neq 0$	$f(x) = a(x-u)^2 + v$ wenn $a \neq 0$

Nullstellen: $f(x) = 0$

$$ax^2 + x + c = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b - 4ac}}{2a}$$

wenn $a \neq 0$

Scheitelpunkt: $S(u|v) = S\left(\frac{-b}{2a} \middle| \frac{-b^2+4ac}{4a}\right)$

Zum Beispiel:

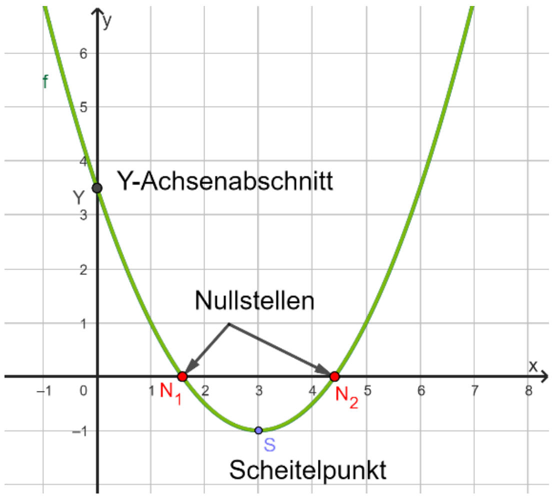
$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 3.5$$

oder

$$= \frac{1}{2}(x-3)^2 - 1$$

oder

$$= \frac{1}{2}(x - 1.59)(x - 4.41)$$



Exponentialfunktionen

Funktionsvorschrift: $f(x) = b \cdot a^x$

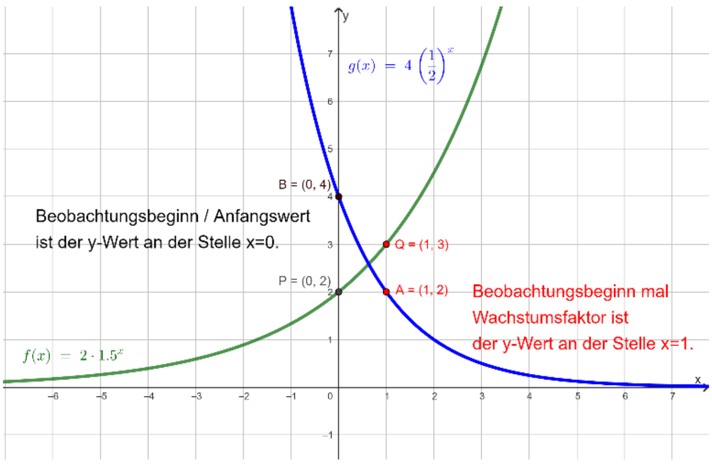
wenn $b \neq 0,\ a > 0$

Nullstellen: keine

Exponentieller Zerfall: $0 < a < 1$

Exponentielles Wachstum: $a > 1$

Natürliche Exponentialfunktion: $f(x) = e^x$



Differenzialrechnung

Differenzenquotient

h-Methode: $m(h) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

Differentialquotient

Grenzübergang für $h \to 0$: $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} m(h)$

Ableitungsregeln

Potenzregel:	$f(x) = x^n$	$\Rightarrow$	$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$
Summenregel:	$f(x) = u(x) + v(x)$	$\Rightarrow$	$f'(x) = u'(x) + v'(x)$
Faktorregel:	$f(x) = c \cdot u(x)$	$\Rightarrow$	$f'(x) = c \cdot u'(x)$
Produktregel:	$f(x) = u(x) \cdot v(x)$	$\Rightarrow$	$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$
Quotientenregel:	$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$	$\Rightarrow$	$f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{(v(x))^2}$

Spezielle Funktionen und ihre Ableitungen:

$f(x) = e^x$	$\Rightarrow$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = \ln(x)$	$\Rightarrow$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = \sin(x)$	$\Rightarrow$	$f'(x) = \cos(x)$
$f(x) = cos(x)$	$\Rightarrow$	$f'(x) = -sin(x)$

Lösen eines Extremalproblems mit quadratischen Funktionen

I. Die zu optimierende Grösse als Funktion einer einzigen Variablen darstellen

(a) Die Variablen sowie die gegebenen Grössen aus der Problemstellung entnehmen oder festlegen.

(b) Die zu optimierende Grösse in einer Ausgangsgleichung darstellen.

(c) Die Nebenbedingungen aus der Problemstellung entnehmen und als Gleichungen formulieren.

(d) Die Ausgangsgleichung mit Hilfe der Nebenbedingungen so umformen, dass die zu optimierende Grösse als Funktion nur einer Variablen erscheint.

(e) Aus der Problemstellung den Definitionsbereich dieser einzigen Variablen bestimmen.

II. Bestimmen des Maximums/Minimums

(a) Den Scheitelpunkt des Graphen der zu optimierenden Funktion bestimmen. Die y-Koordinate des Scheitelpunktes ist das gesuchte Maximum/Minimum

(b) Mit Hilfe der x-Koordinate des Scheitelpunktes und der Nebenbedingungen die übrigen Variablen berechnen.

(c) Die gestellte Frage mit 'deutschen Sätzen' beantworten.

Wahrscheinlichkeitsrechnung

Wichtige Begriffe

Zufallsversuch: ist ein (theoretisch) beliebig oft wiederholbarer Vorgang, dessen Ausgang sich *nicht* mit Sicherheit vorhersagen lässt.

Ergebnisraum Ω (Stichprobenraum): Die Menge aller möglichen Ausgänge (Ergebnisse) eines Zufallsversuches.

Ereignis: Teilmenge A von Ω.

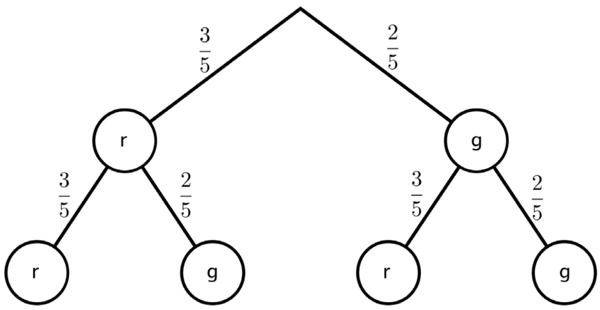
Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen des Ereignisses A : $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{günstig\ Fälle}{alle\ möglichen\ Fälle}$

Achtung: Diese Formel gilt nur, wenn alle Ausgänge des Zufallsversuchs gleich wahrscheinlich sind.

Mehrstufige Zufallsversuche

Mehrstufige Zufallsversuche können oft mit Baumdiagrammen beschrieben werden.

Beispiel: Aus einer Urne mit drei roten und zwei grünen Kugeln wird eine Kugel gezogen und ihre Farbe notiert. Danach wird die Kugel wieder zurückgelegt und der Versuch wiederholt.



1. Zufallsversuch:
Ziehen der ersten Kugel
r : die Kugel ist rot
g : die Kugel ist grün

2. Zufallsversuch:
Ziehen der zweiten Kugel
r : die Kugel ist rot
g : die Kugel ist grün

Für Baumdiagramme gelten die folgenden **Pfadregeln:**

1. Die Wahrscheinlichkeit eines Pfades ist gleich dem Produkt aller Wahrscheinlichkeiten längs des Pfades.
2. Setzt sich bei einem mehrstufigen Zufallsversuch ein Ereignis aus verschiedenen Pfaden im Baumdiagramm zusammen, dann erhält man die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses durch Addition der einzelnen Pfadwahrscheinlichkeiten.

Für unser Beispiel ergeben sich beispielsweise die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

$P(rr) = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$ (Pfad ganz links) oder $P(gr) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{25}$ (Pfad rechts-links)

Das folgende Ereignis setzt sich aus 3 Pfaden zusammen

$$P(mindestens\ eine\ rote\ Kugel) = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{21}{25}$$

Fakultät (!)

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 \qquad 0! := 1, \quad 1! := 1$$

zählt die Anzahl der Möglichkeiten, n unterscheidbare Gegenständen in eine Reihenfolge zu bringen (zu permutieren).

Binomialkoeffizient (nCr)

$$\binom{n}{k} = \frac{\overbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \ldots (n-k+1)}^{k\ Zahlen}}{\underbrace{k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \ldots \cdot 2 \cdot 1}_{k\ Zahlen}} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$\binom{n}{k}$, *lies n tief k*, zählt die Anzahl der Möglichkeiten, aus n unterscheidbaren Gegenständen genau k auszuwählen. *Bsp.:* Delegation!

Bernoulli-Kette

Zufallsversuche mit genau zwei möglichen Ausgängen ("Erfolg" und "Misserfolg") nennt man **Bernoulli-Experimente**.

Ein Zufallsversuch, der aus n unabhängigen Durchführungen desselben Bernoulli-Experimentes besteht, heisst **Bernoulli-Kette**.

Bei einer **Bernoulli**-Kette von n Durchführungen mit der Erfolgswahrscheinlichkeit p beträgt die Wahrscheinlichkeit für k Erfolge

$$P(k - mal\ Erfolg) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Lotto "k aus n"

Auf einem Lottoschein werden pro Tipp genau k von n Zahlen zufällig angekreuzt. Dann werden zufällig k Zahlen gezogen.
Die Wahrscheinlichkeit, bei einem Tipp genau j Zahlen richtig getippt zu haben, beträgt:

$$P(j\ Richtige) = \frac{\binom{k}{j} \cdot \binom{n-k}{k-j}}{\binom{n}{k}}$$

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis A eintritt, unter der Bedingung, dass das Ereignis B bereits eingetreten ist, berechnet sich durch den Quotient aus der Wahrscheinlichkeit, dass die Ereignisse A und B gleichzeitig eintreten, durch die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis B eintritt.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$