

Formelsammlung

Mathematik

Niveau II

Algebra

Rechengesetze

Kommutativgesetze	$a + b = b + a$	$a \cdot b = b \cdot a$
Assoziativgesetze	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
Distributivgesetz	$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$	

Binomische Formeln

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	"+"-Formel
$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	"-"-Formel
$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$	"+"-"-Formel

Potenzregeln

Multiplikation und Division von...		
...Potenzen mit gleicher Basis:	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
...Potenzen mit gleichem Exponenten:	$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$	$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$
Potenz einer Potenz	$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	
Die Potenzregeln gelten für beliebige Exponenten n und m .		

Logarithmus Definition

$a^x = u$	$\Leftrightarrow$	$x = \log_a(u)$ "Logarithmus zur Basis a von u"	$a, u \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$
$\ln(x) = \log_e(x)$ natürlicher Logarithmus; $\log(x) = \log_{10}(x)$ Zehner Logarithmus;			

Logarithmengesetze

Für das Rechnen mit Logarithmen gelten die folgenden Regeln:	
$\log_a(u \cdot v) = \log_a(u) + \log_a(v)$	
$\log_a(u : v) = \log_a(u) - \log_a(v)$	
$\log_a(u^r) = r \cdot \log_a(u)$	$u \in \mathbb{R}^+, r \in \mathbb{R}.$

Geometrie: Ebene Figuren

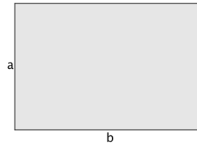
Quadrat



Umfang: $U = 4a$

Fläche: $F = a^2$

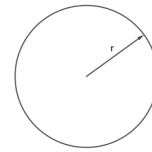
Rechteck



Umfang: $U = 2a + 2b$

Fläche: $F = ab$

Kreis

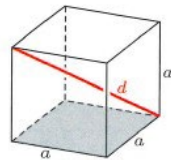


Umfang: $U = 2\pi r$

Fläche: $F = \pi r^2$

Geometrie: Räumliche Figuren

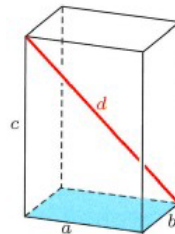
Würfel



Oberfläche: $S = 6a^2$

Volumen: $V = a^3$

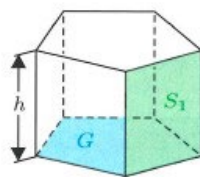
Quader



Oberfläche: $S = 2ab + 2ac + 2bc$

Volumen: $V = abc$

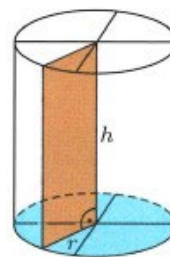
Prisma



Oberfläche: $S = 2G + S_1 + S_2 + \dots + S_n$

Volumen: $V = Gh$

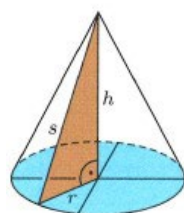
Zylinder



Oberfläche: $S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$

Volumen: $V = \pi r^2 h$

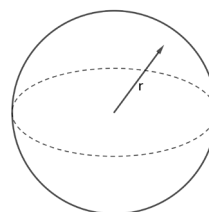
Kreiskegel



Oberfläche: $S = \pi r^2 + \pi r s$

Volumen: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

Kugel



Oberfläche: $S = 4\pi r^2$

Volumen: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

Folgen und Reihen

Folge	rekursive Beschreibungen	explizite Beschreibungen
arithmetische Folgen	$a_1, a_n = a_{n-1} + d$ oder $a_1, a_{n+1} = a_n + d$	$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$ oder $a_n = n \cdot d + a_1 - d$
geometrische Folgen	$a_1, a_n = a_{n-1} \cdot q$ oder $a_1, a_{n+1} = a_n \cdot q$	$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$
Fibonacci-Folge	$F_1 = F_2 = 1, F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$	$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$

Teilsommen (Die Summanden bilden eine Folge!)

Folge der Summanden	Folge der Teilsommen
arithmetische Folge: $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$	$s_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}$
Folge der natürlichen Zahlen (Spezialfall mit $a_1 = 1$ und $d = 1$): $a_n = n$	$D_n = \frac{n \cdot (n + 1)}{2}$
geometrische Folge: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$	$s_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \dots + a_1 q^{n-1}$ $= a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$
Fibonacci-Folge	$s_n = F_{n+2} - 1$
Folge der Quadratzahlen: $a_n = n^2$	$s_n = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}$
Folge der Kubikzahlen: $a_n = n^3$	$s_n = \left(\frac{n(n + 1)}{2} \right)^2$

Geometrische Reihe

$$s_\infty = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} \right) = a_1 \cdot \frac{1}{1 - q} = \frac{a_1}{1 - q}$$

,wenn $-1 < q < 1$

Funktionen

Lineare Funktionen

Funktionsvorschrift:

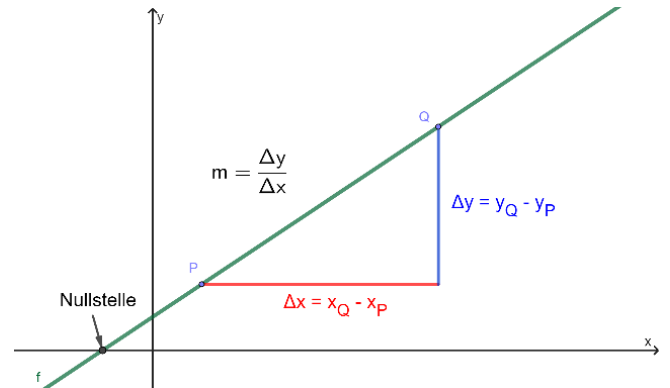
$$f(x) = mx + q$$

Nullstelle:

$$f(x) = 0$$

$$mx + q = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{-q}{m} \quad \text{wenn } m \neq 0$$



Quadratische Funktionen

Funktionsvorschrift:

Normalform

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{wenn } a \neq 0$$

Scheitelform

$$f(x) = a(x - u)^2 + v \quad \text{wenn } a \neq 0$$

Nullstellen:

$$f(x) = 0$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$\Rightarrow$

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{wenn } a \neq 0$$

Scheitelpunkt:

$$S(u|v) = S\left(\frac{-b}{2a} \mid \frac{-b^2 + 4ac}{4a}\right)$$

Zum Beispiel:

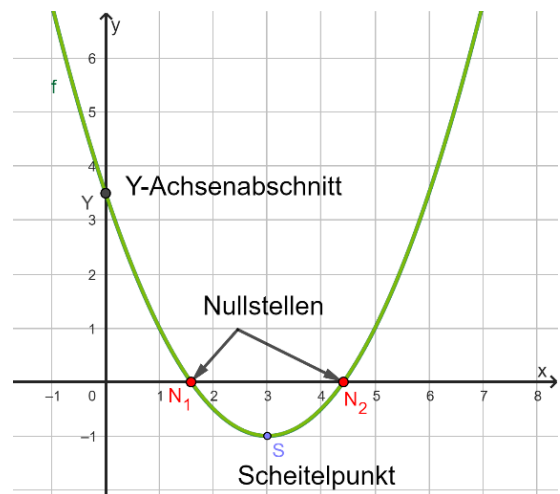
$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 3.5$$

oder

$$= \frac{1}{2}(x - 3)^2 - 1$$

oder

$$= \frac{1}{2}(x - 1.59)(x - 4.41)$$



Exponentialfunktionen

Funktionsvorschrift:

$$f(x) = b \cdot a^x$$

$$\text{wenn } b \neq 0, a > 0$$

Nullstellen:

keine

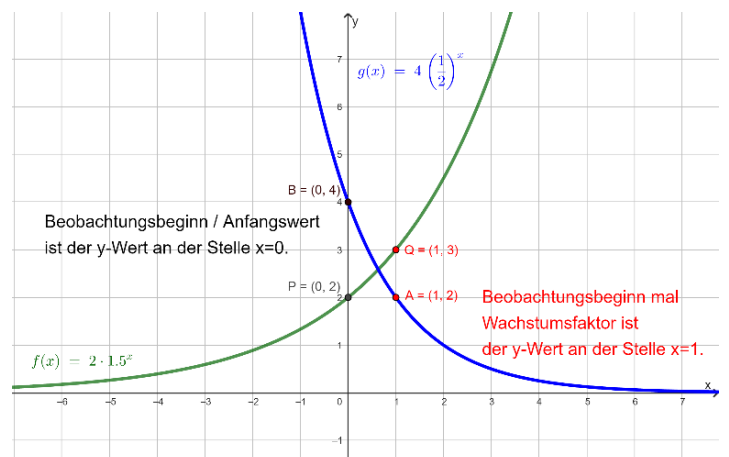
Exponentieller Zerfall:

$$0 < a < 1$$

Exponentielles Wachstum:

$$a > 1$$

Natürliche Exponentialfunktion: $f(x) = e^x$



Differentialrechnung

Differenzenquotient

h-Methode:

$$m(h) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Differentialquotient

Grenzübergang für $h \rightarrow 0$:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} m(h)$$

Ableitungsregeln

<u>Potenzregel:</u>	$f(x) = x^n$	$\Rightarrow$	$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$
<u>Summenregel:</u>	$f(x) = u(x) + v(x)$	$\Rightarrow$	$f'(x) = u'(x) + v'(x)$
<u>Faktorregel:</u>	$f(x) = c \cdot u(x)$	$\Rightarrow$	$f'(x) = c \cdot u'(x)$
<u>Produktregel:</u>	$f(x) = u(x) \cdot v(x)$	$\Rightarrow$	$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$
<u>Quotientenregel:</u>	$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$	$\Rightarrow$	$f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{(v(x))^2}$
<u>Spezielle Funktionen und ihre Ableitungen:</u>			
	$f(x) = e^x$	$\Rightarrow$	$f'(x) = e^x$
	$f(x) = \ln(x)$	$\Rightarrow$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
	$f(x) = \sin(x)$	$\Rightarrow$	$f'(x) = \cos(x)$
	$f(x) = \cos(x)$	$\Rightarrow$	$f'(x) = -\sin(x)$

Lösen eines Extremalproblems mit Differentialrechnung

I. Die zu optimierende Grösse als Funktion einer einzigen Variablen darstellen

- Die Variablen sowie die gegebenen Grössen aus der Problemstellung entnehmen oder festlegen.
- Die zu optimierende Grösse in einer Ausgangsgleichung darstellen.
- Die Nebenbedingungen aus der Problemstellung entnehmen und als Gleichungen formulieren.
- Die Ausgangsgleichung mit Hilfe der Nebenbedingungen so umformen, dass die zu optimierende Grösse als Funktion nur einer Variablen erscheint.
- Aus der Problemstellung den Definitionsbereich dieser einzigen Variablen bestimmen.

II. Bestimmen der globalen Extrema

- Die lokalen Extrema der gefundenen Funktion bestimmen.
- Die globalen Extrema der gefundenen Funktion bestimmen (die lokalen Extremwerte mit den Werten der Randstellen der Definitionsbereichs vergleichen).
- Mit Hilfe der Extremstellen und der Nebenbedingungen die übrigen Variablen berechnen.
- Die gestellte Frage mit 'deutschen Sätzen' beantworten.

Wahrscheinlichkeitsrechnung

Wichtige Begriffe

Zufallsversuch: ist ein (theoretisch) beliebig oft wiederholbarer Vorgang, dessen Ausgang sich *nicht* mit Sicherheit vorhersagen lässt.

Ergebnisraum Ω (Stichprobenraum): Die Menge aller möglichen Ausgänge (Ergebnisse) eines Zufallsversuches.

Ereignis: Teilmenge A von Ω .

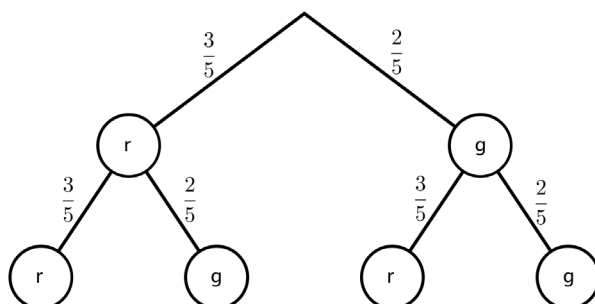
Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen des Ereignisses A : $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{günstig Fälle}}{\text{alle möglichen Fälle}}$

Achtung: Diese Formel gilt nur, wenn alle Ausgänge des Zufallsversuchs gleich wahrscheinlich sind.

Mehrstufige Zufallsversuche

Mehrstufige Zufallsversuche können oft mit Baumdiagrammen beschrieben werden.

Beispiel: Aus einer Urne mit drei roten und zwei grünen Kugeln wird eine Kugel gezogen und ihre Farbe notiert. Danach wird die Kugel wieder zurückgelegt und der Versuch wiederholt.



1. Zufallsversuch:
Ziehen der ersten Kugel
r : die Kugel ist rot
g : die Kugel ist grün
2. Zufallsversuch:
Ziehen der zweiten Kugel
r : die Kugel ist rot
g : die Kugel ist grün

Für Baumdiagramme gelten die folgenden **Pfadregeln:**

1. Die Wahrscheinlichkeit eines Pfades ist gleich dem Produkt aller Wahrscheinlichkeiten längs des Pfades.
2. Setzt sich bei einem mehrstufigen Zufallsversuch ein Ereignis aus verschiedenen Pfaden im Baumdiagramm zusammen, dann erhält man die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses durch Addition der einzelnen Pfadwahrscheinlichkeiten.

Für unser Beispiel ergeben sich beispielsweise die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

$$P(rr) = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{25} \quad (\text{Pfad ganz links}) \quad \text{oder} \quad P(gr) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{25} \quad (\text{Pfad rechts-links})$$

Das folgende Ereignis setzt sich aus 3 Pfaden zusammen

$$P(\text{mindestens eine rote Kugel}) = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{21}{25}$$

Fakultät (!)

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$$

$$0! := 1, \quad 1! := 1$$

zählt die Anzahl der Möglichkeiten, n unterscheidbare Gegenstände in eine Reihenfolge zu bringen (zu permutieren).

Binomialkoeffizient (nCr)

$$\binom{n}{k} = \frac{\overbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \dots (n-k+1)}^{k \text{ Zahlen}}}{\underbrace{k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \dots 2 \cdot 1}_{k \text{ Zahlen}}} = \frac{n!}{k! (n-k)!}$$

$\binom{n}{k}$, lies "n tief k", zählt die Anzahl der Möglichkeiten, aus n unterscheidbaren Gegenständen genau k auszuwählen.

Bsp.: Delegation!

Bernoulli-Kette

Zufallsversuche mit genau zwei möglichen Ausgängen ("Erfolg" und "Misserfolg") nennt man **Bernoulli-Experimente**.

Ein Zufallsversuch, der aus n unabhängigen Durchführungen desselben Bernoulli-Experimentes besteht, heisst **Bernoulli-Kette**.

Bei einer **Bernoulli-Kette** von n Durchführungen mit der Erfolgswahrscheinlichkeit p beträgt die Wahrscheinlichkeit für k Erfolge

$$P(k - \text{mal Erfolg}) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Lotto "k aus n"

Auf einem Lottoschein werden pro Tipp genau k von n Zahlen zufällig angekreuzt. Dann werden zufällig k Zahlen gezogen.

Die Wahrscheinlichkeit, bei einem Tipp genau j Zahlen richtig getippt zu haben, beträgt:

$$P(j \text{ Richtige}) = \frac{\binom{k}{j} \cdot \binom{n-k}{k-j}}{\binom{n}{k}}$$

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis A eintritt, unter der Bedingung, dass das Ereignis B bereits eingetreten ist, berechnet sich durch den Quotient aus der Wahrscheinlichkeit, dass die Ereignisse A und B gleichzeitig eintreten, durch die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis B eintritt.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$